

## Übungsaufgaben zur Elektrodynamik<sup>2</sup>

**22 Punkte**

### 1. Dirac'sche Deltafunktion

**8 Punkte**

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int_{-1}^4 (x^3 + 2x - 2) \delta(x - 2) dx, \quad \int_{-2}^2 (x^2 - 1) \delta(x - 3) dx, \quad \int_a^b (f(x) - f(x_0)) \delta(x - x_0) dx$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \delta(c(x - x_0)) dx, \quad \int_2^{10} x^2 \delta(x^2 - 6x + 5) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \delta'(x - x_0) dx$$

$c$  und  $x_0$  sind reelle Zahlen.  $\delta'$  bedeutet Ableitung der Deltafunktion.

c) Berechnen Sie in kartesischen und Kugelkoordinaten über den Bereich einer im Ursprung zentrierten Kugel und mit dem Radius  $R$

$$\int_V \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \delta(\vec{r}) dV$$

$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  bedeutet ein Produkt von  $\delta$ -Funktionen. Jede davon kann man unter ihr jeweiliges Integral  $\int dx$ ,  $\int dy$  bzw.  $\int dz$  ziehen.

### 2. Feldenergie von Punktladungsverteilungen

**8 Punkte**

Berechnen Sie die elektrische Feldenergie des Dipols: Zwei Ladungen  $q$  und  $-q$  an den Punkten  $\vec{r}$  und  $-\vec{r}$ , indem Sie:

- die Feldenergie aus der elektrischen Feldstärke des Gesamtfeldes berechnen und einen Selbstenergieterm abspalten;
- die Energien der Punktladungen in den Feldern der jeweils anderen Ladungen berechnen und diese addieren.

*Tipp:*

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2xyz + y^2)^{-1/2} = -(x - yz)(x^2 - 2xyz + y^2)^{-3/2}$$

<sup>1</sup>udo.schwarz@uni-potsdam.de

<sup>2</sup><http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehreangebot/2019WSEdynamik/2019WSEdynamik.html>

**3.**

**Dipol und  $\delta$ -Funktion**

**6 Punkte**

Zeigen Sie auf drei verschiedenen Wegen, dass die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}) = -(\vec{p} \cdot \nabla) \delta(\vec{r})$  einen elektrischen Dipol mit dem Moment  $\vec{p}$  beschreibt, der sich im Koordinatenursprung befindet:

- a) Berechnen Sie das elektrische Potential unmittelbar aus der gegebenen Ladungsverteilung.
- b) Verwenden Sie die Poisson-Gleichung und das Potential des elektrischen Dipols.
- c) Gehen Sie von der Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten aus. Dabei ist insbesondere zu zeigen, dass alle vom Dipol-Moment verschiedenen Momente verschwinden.