Universität Potsdam WS2019/20: Übung 07
Institut für Physik und Astronomie Vorlesung: Feldmeier
Abgabe Mi 15 Uhr/Do 10 Uhr am 27./28. November 2019 Übung: Schwarz[1]

Übungsaufgaben zur Elektrodynamik[2] 24 Punkte

1. Besselfunktionen 1. Art 9 Punkte

Zeigen Sie, dass die Bessel'sche Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ durch die Besselfunktionen 1. Art

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

gelöst wird. Beginnen Sie mit dem Potenzreihen-Ansatz

$$y = x^s \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$$

mit $a_0 \neq 0$.

2. Legendreentwicklung des Punktquellenpotentials 10 Punkte

a) Sei $\vec{r}$ der Ort einer Ladung, $\vec{x}$ der Ort der Feldmessung. Sei $\cos\theta = \hat{r} \cdot \hat{x}$ und $x = |\vec{x}|$, $r = |\vec{r}|$. Legendrepolynome P_l werden definiert durch

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^l P_l(\cos\theta), \qquad \text{für } x < r, \tag{1}$$

und

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}|} = \frac{1}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{x}\right)^l P_l(\cos\theta), \qquad \text{für } x > r. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die P_l folgende Differentialgleichung erfüllen, wobei $y \in [-1, 1]$ eine reelle Variable ist

$$\frac{d}{dy}\left[(1 - y^2) \frac{dP_l(y)}{dy}\right] + l(l+1) P_l(y) = 0. \tag{3}$$

[1] udo.schwarz@uni-potsdam.de
[2] http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2019WSEDynamik/2019WSEDynanik.html

b) Wie lautet die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten bei Azimutalsymmetrie? Machen Sie einen Separationsansatz. Wie lauten die resultierenden Differentialgleichungen? Zeigen Sie die Verbindung auf zu (6). Können Sie ein Argument geben, warum die Separationskonstante die Form $l(l+1)$ haben muss, mit $l \in \mathbb{N}$?

3. Legendrepolynome und Potential einer Kugel **5 Punkte**

Das Potential sei auf der Kugel mit dem Radius R durch die Funktion $\Phi_0(\theta)$ vorgegeben. Bestimmen Sie das Potential für den Innenraum der Kugel. Wie sieht das Potential für die spezielle Randbedingung $\Phi_0(\theta) = C\sin^2(\theta/2)$ aus?