

## Übungsaufgaben zur theoretischen Mechanik<sup>2</sup>

14 Punkte

### 1. Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$

7 Punkte

Welche geometrischen Figuren beschreiben die Ortsvektoren  $\vec{r}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , die folgenden Gleichungen genügen?

- $|\vec{x}| = 1$
- $|\vec{x} - \vec{x}_0| = R$  mit einer festen positiven reellen Zahl  $R$  und einem festen Vektor  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$
- $\vec{x} \cdot \vec{e} = 0$  mit einem festen Vektor  $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$
- $\vec{r} \cdot \vec{k} = k^2$  mit einem festen Vektor  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ , wobei  $k = \|\vec{k}\|_2$  die euklidische Norm des Vektors bezeichnet.
- $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$  mit beliebigen festen Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ .
- $\vec{x}(\phi) = (\phi \cos \phi, \sin \phi, C\phi)$  mit festem  $C \in \mathbb{R}$  und beliebigem  $\phi \in \mathbb{R}$
- 

$$\vec{r}(b, l) = \begin{pmatrix} R \sin(b) \cos(l) \\ R \sin(b) \sin(l) \\ R \cos(b) \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \in [0, \pi/2] \quad \text{und } l \in [0, 2\pi)$$

mit festem  $R$ .

### 2. Gradient in krummlinigen Koordinaten

2 Punkte

Berechnen Sie die Gradienten folgender Skalarfelder:

- $\phi_P(r) = \frac{1}{r}$
- $\phi_D(r, \vartheta) = \frac{\cos \vartheta}{r^2}$

Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien und Gradientenfelder.

### 3. Divergenz

5 Punkte

Berechnen Sie die Divergenz der Vektor-Felder im  $\mathbb{R}^3$ :

- $\vec{F} = Kxyz(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$
- $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$  mit  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$
- $\vec{v}(x, y, z) = r\vec{a}$
- $\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})$
- $\vec{E}(\vec{r}) = -Kr^n \hat{r}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$

$K, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  sind Konstanten. Es gelte  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

<sup>1</sup>udo.schwarz@uni-potsdam.de

<sup>2</sup><http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2020SSMechanik/2020SSMechanik.html>  
<http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/>