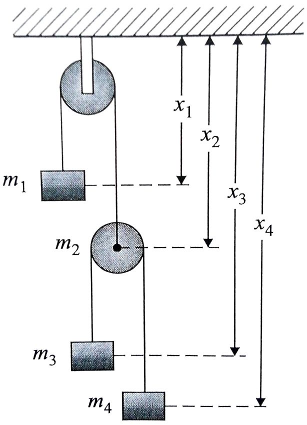
Universität Potsdam
Institut für Physik und Astronomie
Abgabe am 28. Mai 2020, 24 Uhr

SS2020: Übung 06
V: Feldmeier
Schwarz[1]

Übungsaufgaben zur theoretischen Mechanik[2]

20 Punkte

1. Atwood-Maschine mit Euler-Lagrange 1.Art — 5 Punkte



a) Wie lauten die Zwangbedingungen für die Atwood'sche Fallmaschine?

b) Berechnen Sie die vier Beschleunigungen $\ddot{x}_i$ unter Vernachlässigung der Trägheitsmomente beider Rollen.

2. Geodäte — 5 Punkte

Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche. Charakterisieren Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugel (Geodäten) mittels der Euler-Lagrangeschen Gleichung.

Hinweis: Betrachten Sie das geeignete Linienelement. Nutzen Sie die Aussage:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta, \phi, \phi')\,\mathrm{d}\theta$$

wird extremal, falls die Euler-Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi'}\right) = 0$$

erfüllt ist. Siehe auch Wiki oder Taschenbuch der Mathematik.

3. Minimalfläche nach Euler-Lagrange-Gl. — 5 Punkte

Eine Seifenhaut, die zwischen zwei axialsymmetrisch im Abstand a angeordneten Kreisen mit den Radien R_1 und R_2 (also Kegelstumpf mit der Höhe a und den beiden Radien R_1 und R_2 der begrenzenden Kreisflächen) eingespannt ist, nimmt eine Minimalfläche ein. Die gesuchte Mantellinie $y(x)$ der Minimalfläche der Seifenhaut ist nicht die Mantellinie des Kegelstumpfes!

[1] udo.schwarz@uni-potsdam.de

[2] http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/2020SSMechanik.html
http://www.astro.physik.uni-potsdam.de/~afeld/

a) Begründen Sie den Ausdruck für die Wirkung

$$A[y(x)] = 2\,\pi \int_{s_1}^{s_2} y\,ds = 2\,\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\;dx = \text{ Minimal!}$$

wobei x die unabhängige Koordinate des Problems und die x-Achse die Symmetrieachse des Kegelstumpfes ist.

b) Wie lautet die Lagrange-Funktion L des Problems?

c) Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung?

d) Die Lagrange-Funktion hängt nicht explizit von der unabhängigen Koordinate ab. Daher finden Sie die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung leichter unter Nutzung Beltrami-Identität $L - y'\dfrac{\partial L}{\partial y'} = C$,
siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Beltrami_identity

e) Berechnen Sie die Gestalt der Seifenhaut $y(x)$.

4. Brachistochrone **5 Punkte**

1696 veröffentlicht Johann Bernoulli erstmals die Problemstellung zur Brachistochrone mit folgendem Wortlaut:
„Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt.[...]
Damit Liebhaber solcher Dinge Lust bekommen sich an die Lösung dieses Problems zu wagen, mögen sie wissen, dass es nicht, wie es scheinen könnte, blosse Speculation ist und keinen praktischen Nutzen hat. Vielmehr erweist es sich sogar, was man kaum glauben sollte, auch für andere Wissenszweige, als die Mechanik, sehr nützlich. Um einem voreiligen Urtheile entgegenzutreten, möge noch bemerkt werden, dass die gerade Linie AB zwar die kürzeste zwischen A und B ist, jedoch nicht in kürzester Zeit durchlaufen wird. Wohl aber ist die Curve AMB eine den Geometern sehr bekannte; die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat.“

Lösen Sie Bernoullis Aufgabe mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung und bestimmen Sie die Kurve.

Hinweis: Als Wirkung tritt in diesem Falle die Zeitdauer der Bewegung von einem höheren A zu einem tieferen und **horizontal versetzten** Punkt B zu kommen auf: $t_{AB}[z(x)] = \int_A^B \mathrm{d}t = \int_A^B \dfrac{\mathrm{d}s}{v} = \int_A^B \mathrm{d}x \dfrac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}$, wobei für eine reibungsfreie Rutsche im homogenen Kraftfeld der Energiesatz benutzt wurde. Begründen Sie die obigen Gleichheitszeichen.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion L des Problems?

b) Nutzen Sie wieder die Beltrami-Identität zur leichteren Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.